STATISTICA A – K
(63 ore)

Marco Riani

mriani@unipr.it

http://www.riani.it

Esempio totocalcio

- Gioco la schedina mettendo a caso i segni

  1 X 2
- Qual è la prob. di fare 14?

Esempio

- Gioco la schedina mettendo a caso i segni (1 X 2). Qual è la prob. di fare 14?
- E_i= indovino il segno della partita
  i=1, 2, …, 14
- $P(E_i) = 1/3$
- Prob. di fare 14=$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_{14}) = P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3) \times \ldots \times P(E_{14}) = (1/3)^{14}$
  = 2,09075E-07 =1/4.782.969

Oppure

- Casi favorevoli 1
- Casi possibili = $D^{r}_{3,14} = 3^{14}$
- Prob. di fare 14=$(1/3)^{14}$

= 2,09075E-07 =1/4.782.969

Esercizio

- Dati due eventi incompatibili A e B tali che $P(A) = 0{,}35$ e $P(B) = 0{,}40$ si trovino le seguenti probabilità
- $P(A^c)$
- $P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)$
- $P(A^c \cup B^c)$
- $P(A^c \cap B^c)$

$P(A) = 0{,}35$ e $P(B) = 0{,}40$

Soluzione

- $P(A^c) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$
- $P(A \cap B)$?
- $P(A \cap B) = 0$
- $P(A \cup B)$?
- $P(A \cup B) = 0{,}35 + 0{,}4 = 0{,}75$
- $P(A^c \cup B^c)$? $P(A^c \cap B^c)$?
- $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1$
- $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}25$

Esercizio

- Per i due eventi A e B sono note le probabilità $P(A)=0,48$ $P(B)=0,39$

$P(A \cap B)=0,18$ si determinino le probabilità nella tabella che segue

	A	**A^c**	
B			
B^c			

- E si calcolino $P(A \cap B^c)$ e $P(A^c \cap B^c)$

Soluzione

- Per i due eventi A e B sono note le probabilità $P(A)=0,48$ $P(B)=0,39$

  $P(A \cap B)=0,18$ si determinino le probabilità nella tabella che segue

	A	A^c	
B	0,18	0,21	0,39
B^c	0,30	0,31	0,61
	0,48	0,52	1

- $P(A \cap B^c)=0,3$ e $P(A^c \cap B^c)=0,31$

Esercizio

- Si calcoli la probabilità di ottenere un 2 almeno una volta in tre lanci consecutivi di un dado.

Soluzione

- Pr (un due almeno una volta in tre lanci)=1-Pr(nessun due in tre lanci)

- Pr(nessun due in tre lanci)= $(5/6)^3$

- Pr (un due almeno una volta in tre lanci)=1- $(5/6)^3$=0,42

Esercizio

- Delle 80 confezioni di yogurt esposte nel bancone di un supermercato,
  10 scadono fra una settimana,
  50 fra due settimane
  e le restanti 20 fra tre settimane.
  Si calcoli la probabilità che su 5 confezioni scelte a caso due scadano tra una settimana, due scadano fra due settimane e una fra tre settimane

Soluzione

10 1sett	50 2sett	20 3sett

- Casi favorevoli due che scadono tra una settimana =
- Casi favorevoli due che scadono tra due settimane=
- Casi favorevoli 1 che scade tra 3 settimane=
- Casi possibili $=C_{80,5}$
- Pr richiesta $= C_{10,2} \times C_{50,2} \times C_{20,1} / C_{80,5}$ $=0,0459$

Esercizio

- Si calcoli la probabilità che estraendo a sorte due carte da un mazzo di 40 appaiano 2 assi.
  - Nel caso che la prima sia reinserita nel mazzo prima dell’estrazione della seconda
  - Nel caso che la prima non sia reinserita nel mazzo prima dell’estrazione della seconda

Soluzione

- Nel caso che la prima sia reinserita nel mazzo prima dell'estrazione della seconda
- A = asso prima estrazione
- B = asso seconda estrazione
- $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
- Pr richiesta = 0.1*0.1 =0.01

Soluzione

- Nel caso che la prima non sia reinserita nel mazzo prima dell'estrazione della seconda
- A = asso prima estrazione
- B = asso seconda estrazione
- $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$
- $(4/40)\,(3/39) = 0{,}0077$
- Oppure
- Casi favorevoli due assi $= C_{4,2}$
- Casi possibili $= C_{40,2}$
- Pr richiesta $= C_{4,2} \times C_{36,0} / C_{40,2} = 0{,}0077$

Esercizio

- Si dimostri che se due eventi A e B sono indipendenti, allora A e l'evento complementare di B (B^c) sono indipendenti

Esercizio

- Si dimostri che se due eventi A e B sono indipendenti, allora A e l’evento complementare di B (B^c) sono indipendenti

Soluzione

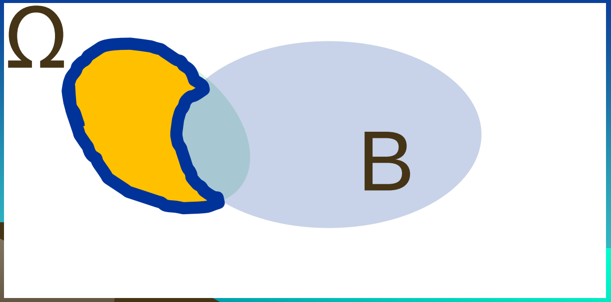
- Ip A e B indipendenti ossia $P(A \cap B)=P(A)P(B)$
- Obiettivo: dimostrare che A e B^c indipendenti ossia che $P(A \cap B^c)= P(A)P(B^c)$

$P(A \cap B^c)=P(A)- P(A \cap B)$

$=P(A)- P(A)P(B)$

$=P(A)(1-P(B))$

$=P(A)P(B^c)$



Esercizio

- Un dado viene lanciato 2 volte. Si indichi con A l’evento “al primo lancio esce un numero minore o uguale a 2” e con B l’evento “al secondo lancio esce un numero uguale o superiore a 5”. Calcolare la probabilità dell’evento unione di A e B.

P(A U B)?

A l’evento “al primo lancio esce un numero ≤2” è costituito dai seguenti 12 eventi elementari

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

B l’evento “al secondo lancio esce un numero ≥5 è costituito dai seguenti 12 eventi elementari

$$B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{12}{36}.$$

$$P(A \cap B) = P(\{(1,5),(2,5),(1,6),(2,6)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{36} + \frac{12}{36} - \frac{4}{36}.$$

Esercizio

- Si hanno tre scatole che contengono: la prima, 2 banconote da €100; la seconda, 1 banconota da €100 e 1 da € 50, la terza, 2 banconote da €50. Si scelga a caso una delle tre scatole (tra loro equiprobabili) e si estragga una banconota. Risulta estratta una banconota da €100; qual è la probabilità che la scatola dalla quale è stata estratta sia la prima?

Soluzione

- C = evento che indica l'estrazione di una banconota da € 100
- S_i = estrazione dalla scatola i (i=1, 2, 3)
- P(S_i)=*1/3* *Obiettivo: calcolare* P(S_1|C)

Scatola ***1***	Scatola ***2***	Scatola 3
100	100	50
100	50	50

$$P(S_1 \mid C) = \frac{P(S_1)P(C \mid S_1)}{P(S_1)P(C \mid S_1) + P(S_2)P(C \mid S_2) + P(S_3)P(C \mid S_3)} =$$

Esercizio

- Si considerino 3 urne, numerate da 1 a 3; ogni urna contiene 5 palline. La generica urna *i* contiene *i* palline bianche e (5-*i*) palline nere, con *i=1,2,3* (cioè, ad esempio, l’urna numero 2 contiene 2 palline bianche e 5-2=3 palline nere). Si estrae a caso un’urna, e da questa una pallina. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia bianca.

Soluzione

- B = evento che indica l'estrazione di una pallina bianca
- *Ui* = estrazione dall'urna i (i=1, 2, 3)
- P(*Ui)=1/3*   *Obiettivo: calcolare P(B)*

Urna **1**	Urna **2**	Urna **3**
B NNNN	BB NNN	BBB NN

$$P(B) = P(U1)P(B\,|\,U1) + P(U2)P(B\,|\,U2) + P(U3)P(B\,|\,U3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Le variabili aleatorie

Capitolo 6 ESERCIZIARIO

Esercizio

- **Punto 5 euro alla roulette su un numero**

X = "guadagno" ⇒ prima del gioco è una v.a.

Distribuzione della v.c. guadagno

Calcolare il valore atteso e la varianza della v.c. guadagno

Esempio

Distribuzione della v.c. X = "guadagno"

x_i	p_i
- 5	36/37
175	1/37
	1

E(X) = -5·(36/37) + 175·(1/37) = -0,135 €

VAR(X) =[-5 – (-0,135)]²·(36/37) + [175-(-0,135)]² ·(1/37) = 852 €

σ(X) = 29,19 €

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

$$= \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

Es. v.c. continua (p. 198)

- Verificare che
  - $f(x)=2x$ se $x \in [0\ 1]$
  - $f(x)=0$ altrimenti

  è una funzione di densità
- Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$
- Disegnare la funzione di densità e la funzione di ripartizione
- $F(0,4)$? $Pr(X>0.5)$? $Pr(0,1 < X < 0,4)$?
- $Pr(X \leq 0,7 \cup X>0,3)$? $E(X)$? $VAR(X)$?

f(x)=2x se x ϵ [0 1]

Per verificare che è una densità

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- 2*x* nell'intervallo [0 1] è sicuramente >=0

$$\int_0^1 2x dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

f(x)=2x se x ϵ [0 1]

Calcolo della funz di ripartizione

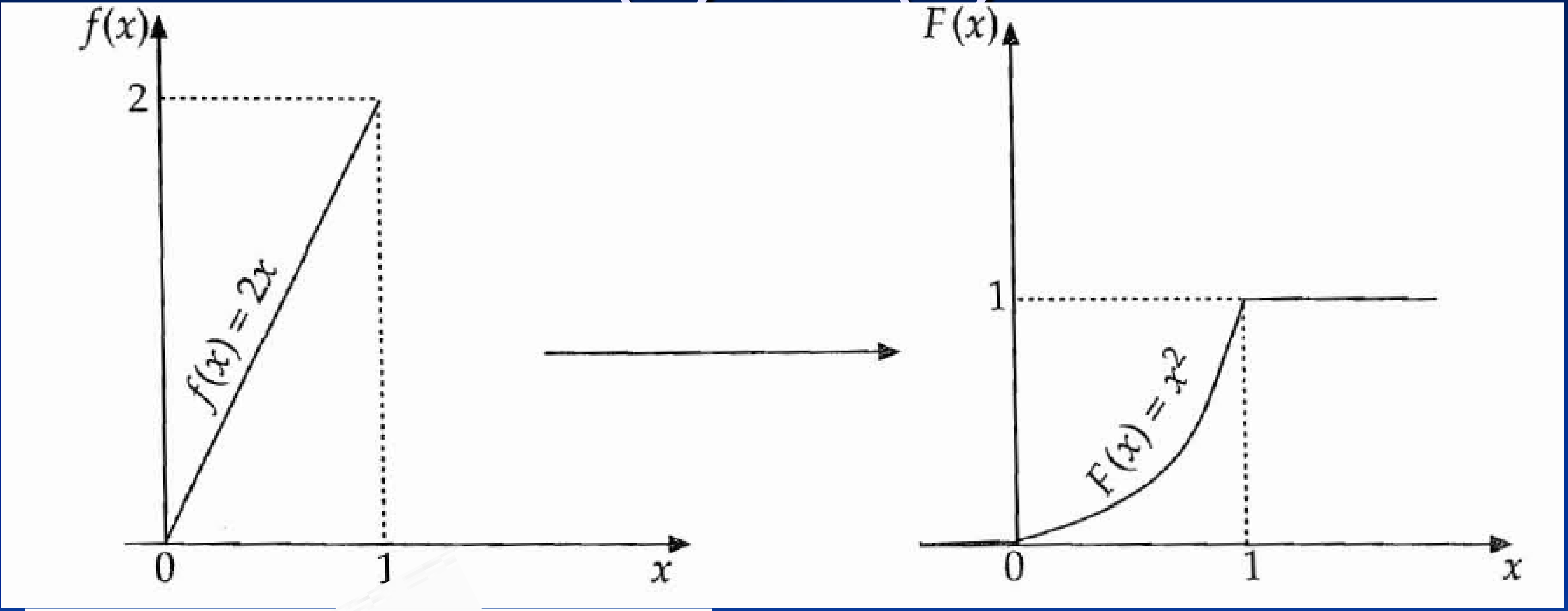
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw = \int_{-\infty}^{0} (0)dw + \int_{0}^{x} (2w)dw = x^2.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

f(x)=2x se x ϵ [0 1]

Rappresentazione grafica f(x) e F(x)



$$f(x) = 2x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Calcolo delle prob. Richieste $F(x)=x^2$

- $F(0,4)=?$
- $F(0,4)=0,16$
- $Pr(X>0.5)?$
- $Pr(X>0.5)=1-0,5^2=0,75$
- $Pr(0,1<X<0,4)?$
- $Pr(0,1<X<0,4) = F(0,4)-F(0,1)=0,4^2-0,1^2=0,15$

Calcolo delle prob. Richieste $F(x)=x^2$

- $Pr(X \leq 0,7 \cup X>0,3)=$

$Pr(X \leq 0,7)+Pr(X > 0,3)-Pr((X \leq 0,7) \cap (X > 0,3))$

$= 0,7^2+(1-0,3^2)-Pr(0,3 \leq X \leq 0,7)$

$= 0.49 + 1 - 0,09 - (0,49 - 0,09) = 1.$

Calcolo del valore atteso

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x \times 2x dx = \frac{2}{3}$$

Calcolo della varianza

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

$$var(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x dx =$$

$$\int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right) dx = \frac{1}{18}$$

- In alternativa utilizzando la formula

$$VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 2x dx = \frac{1}{2}$$

$$var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Esercizio

- Esperimento aleatorio: lancio di due dadi.
- v.a. X= somma dei numeri che appaiono nelle due facce
- Costruire
  - lo spazio degli eventi
  - la distribuzione di probabilità della v.a. X e rappresentarla graficamente
  - la funzione di ripartizione
  - E(X)? Moda? VAR(X)?

Esempio 1

Lancio di due dadi.

X è la somma dei numeri che appaiono nelle due facce

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ω

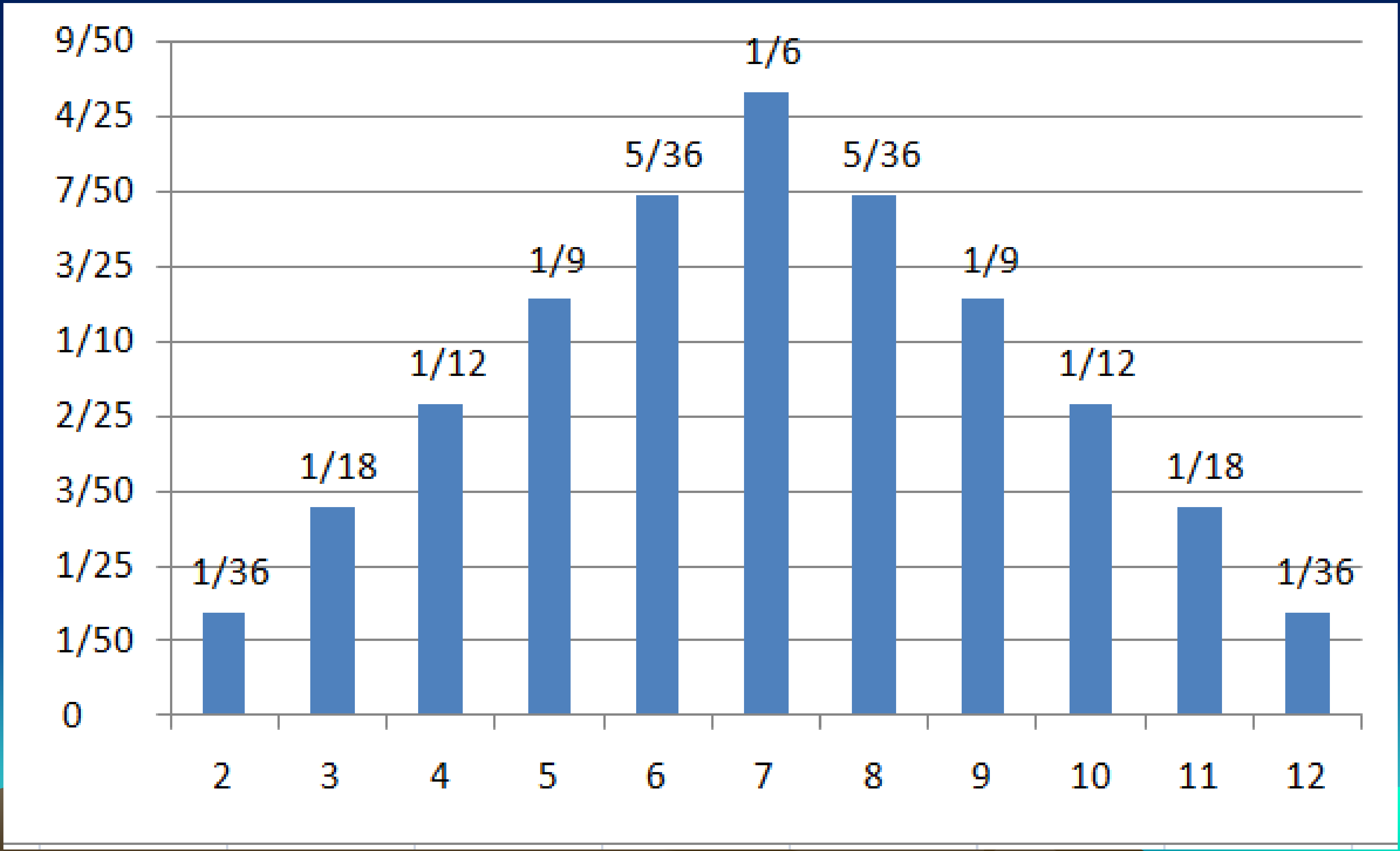
$\Rightarrow$

X	P(X)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Esempio 1
X = somma dei risultati nel lancio di 2 dadi

X	p(X)	F(X)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	1

Rappresentazione grafica f(x)



E(X)? VAR(X)? Moda?

X	p(X)	F(X)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	1

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

$E(X) = 2\times1/36 + 3\times2/36 + \ldots + 12\times1/36 = 7$

$$\mathrm{VAR}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$\mathrm{VAR}(X) = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83$

$$\sigma^2 = VAR(X) = E(X - \mu)^2$$

$\mathrm{VAR}(X) = (2-7)^2(1/36) + (3-7)^2(2/36) + \ldots + (12-7)^2(1/36) = 5{,}83$

Moda(X)=7

Me(X) quando X è una v.c. continua

- Quel valore per cui metà della probabilità sta a sinistra e metà sta a destra

$$\int_{-\infty}^{\text{mediana}} f(x)\,\mathrm{d}x = 50\% \quad \text{e} \quad \int_{\text{mediana}}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 50\%$$

Esercizio

- Sia assegnata una variabile aleatoria con densità data da:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Determinare il valore che deve assumere C affinché *f(x)* possa essere chiamata densità.
2. Rappresentare graficamente la funzione di densità
3. Calcolare P(X>1).
4. Calcolare la mediana di X
5. Calcolare E(X)

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare il valore che deve assumere C affinché *f(x)* possa essere chiamata densità.

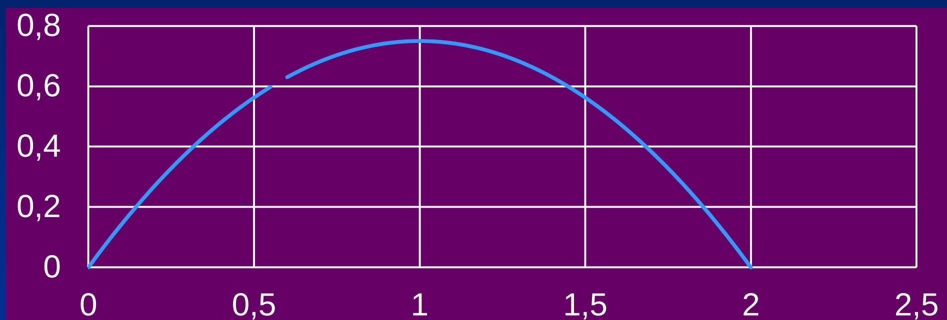
- Dato che

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) = 8/3$$

- C=3/8

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rappresentare graficamente la funzione di densità



- Dalla simmetria emerge immediatamente che P (X>1)= 0.5 e Me(X) =E(X)=1

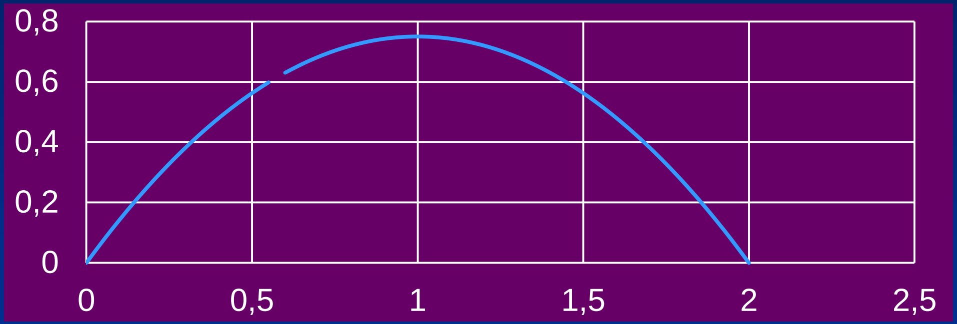
$$P(X > 1) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2) = .5$$

$$\int_0^{Me} f(x)dx = \int_0^{Me} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) = .5$$ = = >

$$-\frac{2}{3}Me^3 + 2Me^2 - \frac{4}{3} = 0$$ = = > $Me = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rappresentare graficamente la funzione di densità



- Calcolo di E(X)

$$E(X) = \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{8}(4x^2 - 2x^3) = 1$$