1 Valore atteso e varianza della v.c. binomiale

La media della distribuzione binomiale si ricava come indicato di seguito:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)![n-1-(x-1)]!} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \\
&= n\pi \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} \pi^y (1-\pi)^{n-1-y}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è posto $y = x - 1$. Tenendo presente che

$$\sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} \pi^y (1-\pi)^{n-1-y} = 1$$

poiché è la somma delle probabilità di una distribuzione binomiale con parametri $n-1$ e π si ottiene

$$E(X) = n\pi$$

Per quanto riguarda la varianza si ha

$$\begin{aligned}
VAR(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} \pi^x (1-\pi)^{n-x} - (n\pi)^2 \\
&= \sum_{x=0}^{n} [x(x-1)+x] \frac{n!}{x!(n-x)!} \pi^x (1-\pi)^{n-x} - (n\pi)^2 \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} \pi^x (1-\pi)^{n-x} + n\pi - (n\pi)^2 \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)![(n-2)-(x-2))]!} \pi^2 \pi^{x-2} (1-\pi)^{n-x} + \\
&\quad + n\pi - (n\pi)^2 \\
&= n(n-1)\pi^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)![n-2-(x-2)]!} \pi^{x-2} (1-\pi)^{n-x} + n\pi - (n\pi)^2
\end{aligned}$$

Tenendo presente che

$$\sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)![n-2-(x-2)]!} \pi^{x-2} (1-\pi)^{n-x} = \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y![n-2-y]!} \pi^y (1-\pi)^{n-2-y} = 1$$

avendo posto $y = x - 2$, si ottiene

$$VAR(X) = n(n-1)\pi^2 + n\pi - (n\pi)^2 = n\pi(1-\pi)$$

2 Valore atteso e varianza della distribuzione normale

Iniziamo a verificare che l'espressione $f(x)$ di seguito è una densità

$$f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

con $\mu \in \Re$ e $\sigma \in \Re^+$, $-\infty < x < \infty$.

Si verifica facilmente che $f(x,\mu,\sigma^2)\geq 0$. Occorre poi dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\mu,\sigma^2)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx$$

è uguale ad 1.

Ponendo $z=(x-\mu)/\sigma$ si ottiene: $x=z\sigma+\mu$, $dx=\sigma dz$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z,0,1)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Tenendo presente che (ad es. http://www.integrals.com oppure

`http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_exponential_functions`

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2}dz=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{per ogni } \alpha>0$$

il risultato si ottiene immediatamente.

2.1 $E(X)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,\mu,\sigma^2)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx$$

Ponendo $z=(x-\mu)/\sigma$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma z+\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma dz\\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\\
&= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left. e^{-\frac{1}{2}z^2}\right|_{-\infty}^{\infty}+\mu\times 1\\
&= 0+\mu\\
&= \mu
\end{aligned}$$

2.2 $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, \mu, \sigma^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Ponendo $z = (x - \mu)/\sigma$ si ottiene:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma z + \mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + 2\mu\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \mu^2 \times 1 + 2\mu\sigma \times 0 \end{aligned}$$

L'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

può essere riscritto come

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \times (z e^{-\frac{1}{2}z^2}) dz$$

Risolvendo per parti si ottiene:

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, z e^{-\frac{1}{2}z^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$

Quindi

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Di conseguenza

$$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

25 febbraio 2014, Corso di Statistica (A-D) 63 ore
Marco Riani
Università di Parma
http://www.riani.it